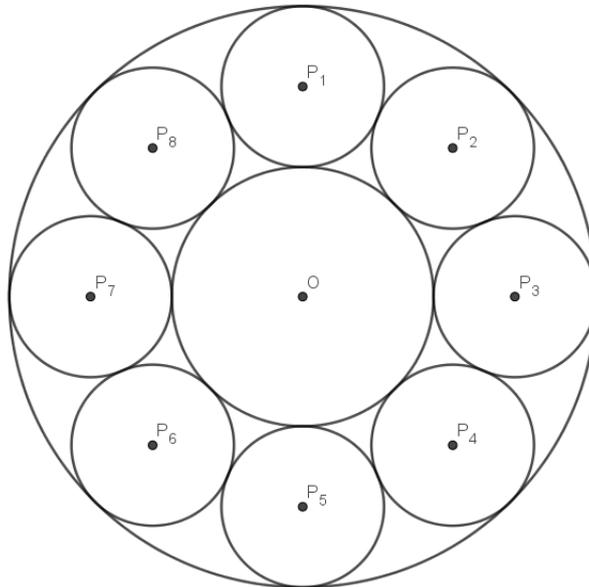


Rosone della chiesa di S. Salvatore a Pavia

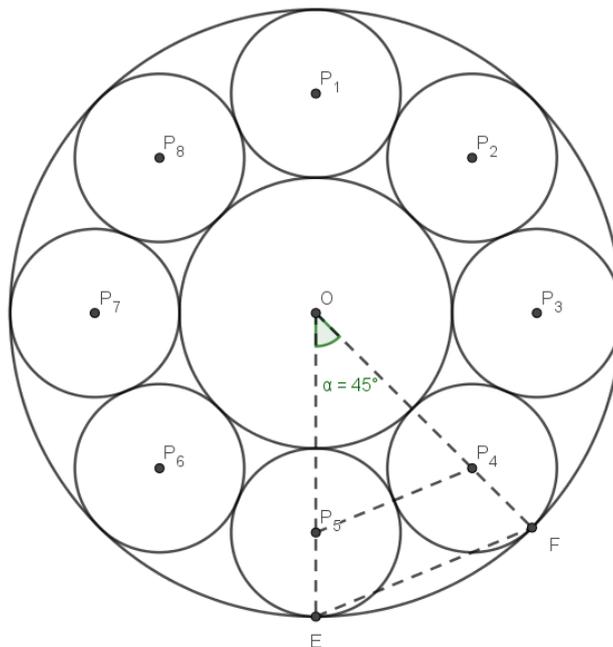
All'interno della Chiesa di S. Salvatore a Pavia, nell'abside, c'è un rosone in ferro battuto che ha la seguente forma:



Posto il raggio del cerchio più grande uguale a R , qual è il raggio dei cerchi piccoli e quanto misura il raggio del cerchio di centro O e interno al rosone? Generalizzare la situazione inserendo nei due cerchi concentrici un numero n qualsiasi di piccoli cerchi.

Soluzione

Si congiunga il punto O con i punti E ed F , si traccino inoltre i segmenti $\overline{P_4P_5}$ e \overline{EF} , come in figura.



Per il teorema di Talete risulta $OP_5 : P_5P_4 = PE : EF$

Posto il raggio di ciascuno degli 8 cerchi uguale a x e ricordando il teorema della corda per il calcolo di \overline{EF} si ottiene:

$$(R-x):2x = R:2R \operatorname{sen} \frac{45^\circ}{2} \quad \text{cioè} \quad (R-x):2x = 1:2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{8} \quad (1)$$

E risolvendo l'equazione

$$x = \frac{R \operatorname{sen} \frac{\pi}{8}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{8} + 1}$$

Svolgendo i calcoli:

$$\begin{aligned} x &= R \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + 1} = R \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}} + 2} \\ x &= R \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}} + 2} \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}} - 2}{\sqrt{2-\sqrt{2}} - 2} = R \frac{2-\sqrt{2}-2\sqrt{2-\sqrt{2}}}{-2-\sqrt{2}} = R \frac{-2+\sqrt{2}+2\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2}} \\ x &= R \frac{-2+\sqrt{2}+2\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = R \frac{-(2-\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{(2-\sqrt{2})^3}}{2} \\ x &= R \frac{-4+4\sqrt{2}-2+2\sqrt{(2-\sqrt{2})^3}}{2} = R \frac{2[-2+2\sqrt{2}-1+\sqrt{(2-\sqrt{2})^3}]}{2} \end{aligned}$$

$$x = R \left[2\sqrt{2} - 3 + \sqrt{(2-\sqrt{2})^3} \right] \quad x \cong 0,27677R$$

Il raggio del cerchio interno al rosone sarà quindi uguale a $R - 4x$

Per la generalizzazione basta porre al posto di $\frac{45^\circ}{2}$ il valore $\frac{\alpha}{2}$ con $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ essendo n il numero dei cerchi tangenti tra loro e tangenti internamente al cerchio grande.